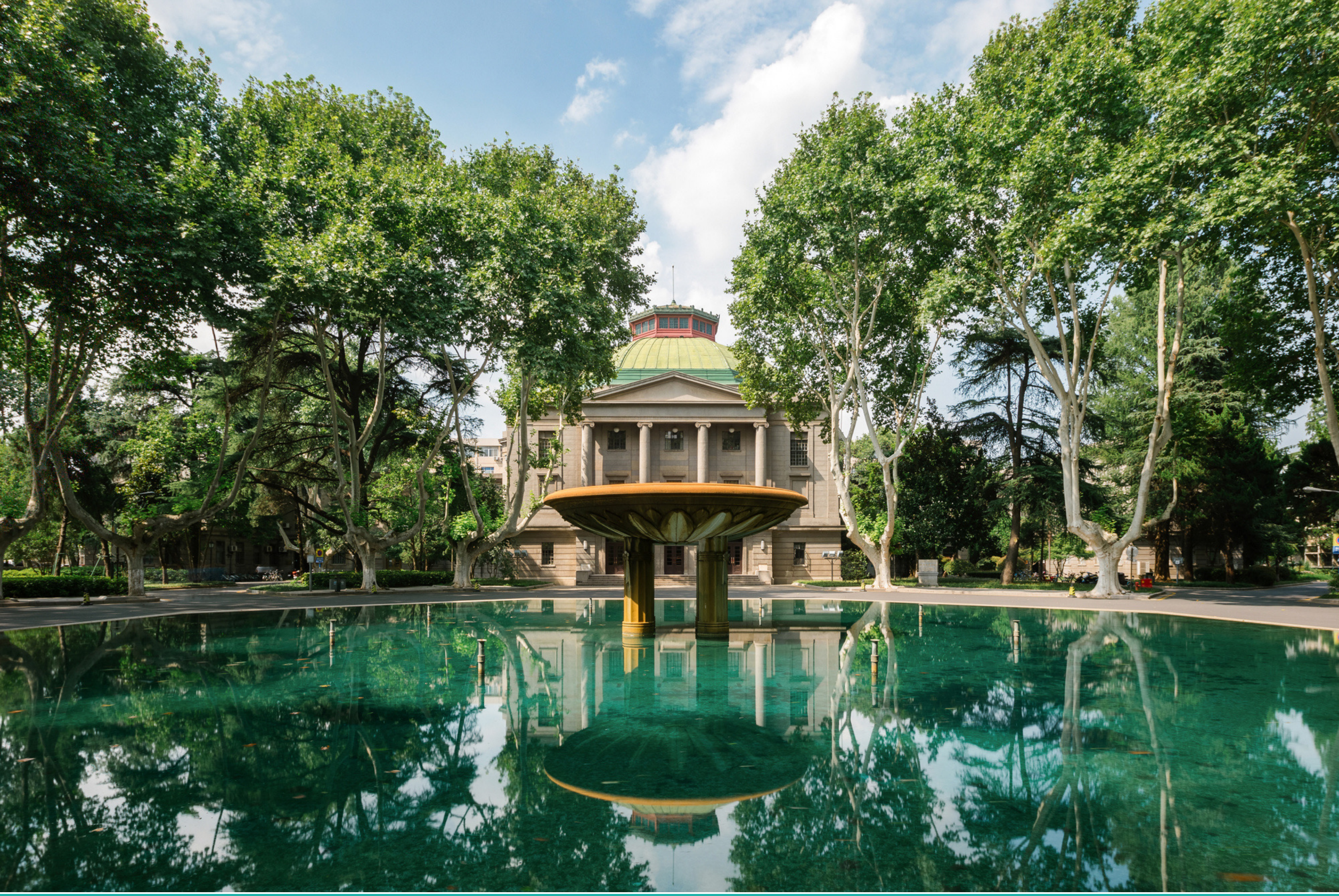


高等代数

Advanced Algebra

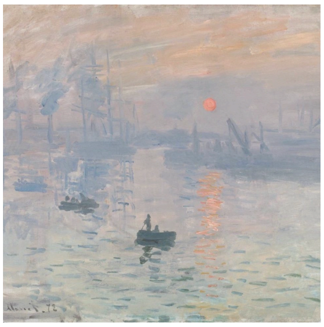
作者：Peknt

组织：清疏大学

时间：September 23, 2024

版本：1.1

作者联系方式：QQ2499032096



我们只会算术

前言

参考书

教材

- 高等代数学，谢启鸿、姚慕生、吴泉水

习题集

- 高等代数，谢启鸿、姚慕生

参考资料

南开大学凯淼淼习题课资料等

目录

第一章 行列式

1.1 基本概念

1.1.1 行列式的定义

定义 1.1 (行列式)

n^2 个数依次排成 n 行，n 列，并用两条竖线围起的式子:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

称为 n 阶行列式。♣

定义 1.2 (余子式)

设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式，划去 $|A|$ 的第 i 及第 j 列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式，这个行列式称为 $|A|$ 的 (i,j) 元素的余子式，记为 M_{ij} ♣

定义 1.3 (代数余子式)

设 $|A|$ 是如(1.1)所示的 n 阶行列式，M_{ij} 是 $|A|$ 的第 (i,j) 元素的余子式，定义 $|A|$ 的第 (i,j) 元素的代数余子式为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

♣

定义 1.4 (行列式的递归定义)

设 $|A|$ 是如(1.1)所示的行列式，若 $n=1$，即 $|A|$ 只含一个元素 a_{11}，则定义 $|A|$ 的值等于 a_{11}。假设 $n-1$ 阶行列式的值已经定义好，那么对任意的 i,j，$|A|$ 的第 (i,j) 元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 已定义好，定义 $|A|$ 的值为

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \tag{1.2}$$

♣

定义 1.5 (行列式的组合定义)

设 $|A|$ 是 n 阶行列式，定义 $|A|$ 的值为

$$\sum_{(k_1,\cdots,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,\cdots,k_n)} a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$$

♣

定理 1.1 (行列式按任意行列展开)

设 $|A|$ 是如(1.1)所示的行列式，则对任意的 $1 \le j \le n$，有

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \tag{1.3}$$

对任意的 $1 \le i \le n$，有

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in} \tag{1.4}$$

♡

1.1.2 行列式的性质

性质 1 上 (下) 三角行列式的值等于其主对角线上元素之积

性质 2 若行列式的某一行 (或某一列) 全为零，则行列式的值等于零

性质 3 用某个常数 c 乘以行列式的某一行 (或某一列)，所得行列式的值等于原行列式值的 c 倍

性质 4 对换行列式的两行 (或两列)，行列式的值改变符号

性质 5 若行列式的某两行 (或某两列成比例)，则行列式的值等于零

性质 6 若行列式的某一行 (或某一列) 元素 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$，则该行列式可分解为两个行列式之和，其中一个行列式的相应行 (列) 的元素为 b_{ij}，另一个行列式的相应行 (列) 的元素为 c_{ij}

性质 7 将行列式的某一行 (或某一列) 乘以常数 c 加到另一行 (或另一列) 上去，行列式的值不变

性质 8 行列式转置之后的值不变，即 $|A'| = |A|$

1.1.3 Cramer 法则

Cramer 法则适用于计算含有 n 个未知数，n 个方程式的线性方程组

线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数按顺序排列组成一个行列式 $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 1.2 (Cramer 法则)

将常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 依次置换 $|A|$ 的第 i 列元素，可得行列式 $|A_i|$ $(1 \le i \le n)$: 若 $|A|$ 不等于零，则该方程组有且只有一组解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

1.2 行列式计算

命题 1.1 (Vandermonde 行列式)

Vandermonde 行列式的值为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

命题 1.2 (分块上 (下) 三角行列式)

$$\begin{vmatrix} A & M \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|\,, \begin{vmatrix} A & O \\ N & B \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

定理 1.3 (Laplace 定理)

设 $|A|$ 是 n 阶行列式，在 $|A|$ 中任取 k 行 (列)，那么含于这 k 行 (列) 的全部 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$，即若取定 k 个行:$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，则

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

同样，若取定 k 个列:$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$，则

$$|A| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \widehat{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

1.2.1 降阶法

降阶法 利用行列式的性质，将行列式的某一行 (列) 化出尽可能多的零，然后按照这一行 (列) 展开，进行降阶处理。

命题 1.3 (爪型行列式)

计算 n 阶行列式，其中 $a_i \neq 0 (2 \le i \le n)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解 将第 i 列乘以 $-\frac{c_i}{a_i}$ 加到第一列上 $(2 \le i \le n)$，可得

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}) a_2 a_3 \cdots a_n$$

注 去掉 $a_i \neq 0 (2 \le i \le n)$ 的条件，我们仍可求出

$$|A| = a_1 a_2 \cdots a_n - \sum_{i=2}^{n} a_2 \cdots \hat{a}_i \cdots a_n b_i c_i$$

其中 $\hat{a}_i$ 表示不在连乘式中。例如，若 $a_i = 0$，则先按 c_i 所在行展开，再按 b_i 所在列展开，即得结论。

命题 1.4

计算 n 阶行列式，其中 $a_i \neq 0(1 \leq i \leq n)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

注 去掉 $a_i \neq 0$ 的条件，我们仍可求出

$$|A| \, (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdots a_{i-1} x_i a_{i+1} \cdots a_n + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n$$

例题 1.1 设 $|A| = |a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式，A_{ij} 是它的第 (i, j) 元素的代数余子式，求证:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = z\,|A| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i y_j$$

1.2.2 求和法

求和法 若一个行列式各行 (各列) 的元素和相等，则可以将这些行 (列) 的所有元素加起来，提取公因子得到元素 1，然后再利用降阶法等方法对行列式进行求值。

例题 1.2 计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

1.2.3 递推法与数学归纳法

递推法 按行或列展开行列式，比较原行列式和降阶后行列式的异同，找出递推关系。如降阶一次仍看不出关系，可再降一次试试。

命题 1.5 (三对角行列式求递推关系)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

解

$$D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1}c_{n-1}D_{n-2}(n \geq 2), D_0 = 1, D_1 = a_1$$

注 令 $b_1 = \cdots = b_{n-1} = 1, c_1 = \cdots = c_{n-1} = -1$，则行列式 D_n 与连分数密切相关。进一步，令 $a_1 = \cdots = a_n = 1$，则行列式 D_n 满足:

$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2}, D_0 = 1, D_1 = 1$$

这就是著名的 Fibonacci 数列。

命题 1.6 (三对角行列式)

计算 n 阶行列式 $(bc \neq 0)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$$

解 递推式为 $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}(n \geq 2)$。令 $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$，则

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2})$$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n, D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n$$

因此，若 $a^2 \neq 4bc$(即 $\alpha \neq \beta$)，则

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

若 $a^2 = 4bc$(即 $\alpha = \beta$)，则

$$D_n = (n+1)(\frac{a}{2})^n$$

命题 1.7 (Cauchy 行列式)

计算 n 阶行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^{-1} & (a_1+b_2)^{-1} & \cdots & (a_1+b_n)^{-1} \\ (a_2+b_1)^{-1} & (a_2+b_2)^{-1} & \cdots & (a_2+b_n)^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n+b_1)^{-1} & (a_n+b_2)^{-1} & \cdots & (a_n+b_n)^{-1} \end{vmatrix}$$

解 记 $|A|$ 为 D_n，则

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_n+b_{n-1})(a_n+b_n)} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_j+b_n)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_j+b_n)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)(b_n-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_j+b_n)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n+b_k)} \cdot D_{n-1}
\end{aligned}
$$

不断递推下去得，

$$
|A| = \frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}
$$

数学归纳法 本质上也是一种递推法，但须事先知道结论。因此有时可以先猜出结论，然后再归纳地证明它。

1.2.4 拆分法

拆分法 利用行列式的性质 6 可将一个行列式拆分为两个或多个行列式之和来计算。

例题 1.3 设 t 是一个参数，

$$
|A| = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}
$$

求证:

$$|A(t)| = |A(0)| + t\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

推论 1.1

设

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$|A(t_1, t_2, \cdots, t_n)| = |A| = \sum_{j=1}\left(t_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\right)$$

1.2.5 升阶法

升阶法 计算行列式通常用降阶法，但有时候也可反其道而行之。升阶法常常用于一些“缺少”某行 (列) 的行列式，加上适当的行 (列) 后反而可以简化问题。

1.2.6 求根法

求根法

设 n 阶行列式 $|A|$ 的元素 $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 都是关于未定元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的多项式，则 $|A|$ 是一个多元多项式。若把 x_1 看成主未定元，则可将 $|A|$ 整理成关于 x_1 的一元多项式:

$$|A| = c_0(x_2, \cdots, x_m)x_1^d + c_1(x_2, \cdots, x_m)x_1^{d-1} + \cdots + c_d(x_2, \cdots, x_m) \tag{1.5}$$

其中 $c_0(x_2, \cdots, x_m) \neq 0, d \geq 1$ 为次数。假设存在互异的多项式 $g_1(x_2, \cdots, x_m), \cdots, g_d(x_2, \cdots, x_m)$，使得当 $x_1 = g_i(x_2, \cdots, x_m)(1 \leq i \leq d)$ 时 $|A| = 0$，则

$$|A| = c_0(x_2, \cdots, x_m) \cdot (x_1 - g_1(x_2, \cdots, x_m)) \cdots (x_1 - g_d(x_2, \cdots, x_m))$$

求根法的原理

1. 确定主未定元 x_1 的次数 d 以及方程 (1.5)d 个不同的根 $g_i(x_2, \cdots, x_m)$
2. 首项系数 $c_0(x_2, \cdots, x_m)$ 或可直接得到，或可通过第一步的方法继续确定
3. 若 $|A|$ 是对称多项式，则可将主未定元进行轮换，简化讨论的过程

1.2.7 Laplace 定理

Laplace 定理推广了“行列式可以按任意一行 (列) 进行展开“这一性质：行列式可以按任意 k 行 (列) 进行展开。

例题 1.4 设 A, B 都是 n 阶矩阵，求证:

$$|A+B| = |A| + |B| + \sum_{1\leq k\leq n}\left(\sum_{\substack{1\leq i_1<i_2\leq\cdots<i_k\leq n \\ 1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n}} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{B}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right)$$

命题 1.8 (行列式的刻画)

设 f 为从 n 阶方阵全体构成的集合到数集上的映射，使得对任意的 n 阶方阵 A，任意的指标 $1 \leq i \leq n$，以及任意的常数 c，满足下列条件:

- 设 A 的第 i 列是方阵 B 和 C 的第 i 列之和，且 A 的其余列与 B 和 C 的对应列完全相同，则 $f(A) = f(B) + f(C)$
- 将 A 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 B，则 $f(B) = cf(A)$
- 对换 A 的任意两列得到方阵 B，则 $f(B) = -f(A)$
- $f(I_n) = 1$，其中 I_n 是单位阵

求证:$f(A) = |A|$

以上给出了行列式的刻画：在方阵 n 个列向量上的多重线性和反对称性，以及正规性 (即单位阵处的取值为 1)，唯一确定了行列式这个函数。

例题 1.5 令

$$(a_1a_2\cdots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & -1 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & 1 \\ & & & & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

证明关于连分数的如下等式成立:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{(a_1a_2\cdots a_n)}{a_2a_3\cdots a_n}$$

第二章 矩阵

2.1 基本概念

2.1.1 矩阵及其运算

定义 2.1

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ 排成 m 行 n 列的如下矩形阵列:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵。

♣

矩阵的运算

1. 矩阵的加法和数乘。设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$，定义 $A+B$ 仍是一个 $m \times n$ 矩阵，且 $A+B$ 的第 (i,j) 元素等于 $a_{ij}+b_{ij}$，即 $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$。若 k 是一个数，定义 k 和矩阵 A 的乘法也是一个 $m \times n$ 矩阵，且 kA 的第 (i,j) 元素等于 ka_{ij}，即 $kA = (ka_{ij})$。
   矩阵的加法和数乘适合的规则
   (a). $A+B = B+A$
   (b). $(A+B)+C = A+(B+C)$
   (c). $O+A = A+O = A$
   (d). $A+(-A) = O$
   (e). $1 \cdot A = A$
   (f). $k(A+B) = kA+kB$
   (g). $(k+l)A = kA+lA$
   (h). $(kl)A = k(lA)$
2. 矩阵的乘法。设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 分别是 $m \times k$ 矩阵和 $k \times n$ 矩阵，定义 A 与 B 的乘积 AB 是一个 $m \times n$ 矩阵，它的第 (i,j) 元素 c_{ij} 等于:
   $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$
   矩阵乘法适合的规则:
   (a). $(AB)C = A(BC)$
   (b). $(A+B)C = AC+BC, C(A+B) = CA+CB$
   (c). $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
3. 方阵的幂。设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，定义 A 的 k 次幂为 k 个 A 的乘积，即 $A^k = A \cdot A \cdots A(k$ 个 $A)$
   方阵幂适合的规则:
   (a). $A^r A^s = A^{r+s}$
   (b). $(A^r)^s = A^{rs}$
4. 矩阵的转置。设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，定义 A 的转置 A'(或写为 A^T) 为一个 $n \times m$ 矩阵，它的第 j 行为 A 的第 j 列 $(1 \le j \le n)$
   矩阵转置适合的规则:
   (a). $(A')' = A$
   (b). $(A+B)' = A'+B'$

(c). $(kA)' = kA'$
(d). $(AB)' = B'A'$

5. 矩阵的共轭。设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 复数矩阵，定义 A 的共轭为一个 $m \times n$ 矩阵 $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$
   矩阵共轭适合的规则:
   (a). $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
   (b). $\overline{kA} = \overline{k}\overline{A}$
   (c). $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$
   (d). $\overline{(A')} = (\overline{A})'$

定理 2.1 (方阵乘积的行列式)

两个同阶方阵乘积的行列式等于行列式的乘积，即 $|AB| = |A|\,|B|$

2.1.2 逆矩阵

定义 2.2

设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则称 A 是可逆矩阵，称 B 是 A 的逆矩阵，记 $B = A^{-1}$。可逆矩阵也称非奇异矩阵，简称非异阵。不是逆矩阵的方阵称为奇异矩阵，简称奇异阵。

求逆运算满足下列法则 (下列矩阵均假设是可逆矩阵):

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
4. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

性质 可逆矩阵之积为可逆矩阵。

性质 任意一个方阵和同阶奇异阵之积为奇异阵。

定义 2.3 (伴随矩阵)

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵，行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，称下列矩阵为 A 的伴随矩阵，记为 A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

伴随矩阵具有下列重要性质:

$$AA^* = A^*A = |A|\, I_n$$

定理 2.2

设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，则 A 是可逆矩阵的充要条件是 A 的行列式 $|A| \neq 0$，此时

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

2.1.3 矩阵的初等变换与初等矩阵

第三章 线性空间

第四章 线性映射

第五章 多项式

第六章 特征值

第七章 相似标准型

第八章 二次型

第九章 内积空间

第十章 双线性型